Φυλλάδιο #3 – Γραμμική Άλγεβρα Ι (2023–2024)

(1). Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση

Είναι

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{\underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -16 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 12 & -16 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_3}{\underset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 5\Gamma_3}{=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

(2) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του πίνακα B κατά τα στοιχεία της $1^{\eta\varsigma}$ στήλης. Οπότε, είναι

$$|B| = 6\cdot(-1)^{6+1}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -6\cdot 5\cdot(-1)^{5+1}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -6\cdot 5\cdot 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -6\cdot 5\cdot(-4)\cdot 3(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -6\cdot 5\cdot(-4)\cdot 3\ (-2)\cdot 1 = -6!$$

(3) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, να δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

(Ορίζουσα Vandermonde)

Λύση

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \overset{\Sigma_1 \to \Sigma_1 - \Sigma_3}{\underset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_3}{=\!=}} \begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \\ \alpha-\gamma & \beta-\gamma & \gamma \\ \alpha^2-\gamma^2 & \beta^2-\gamma^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{1\cdot(-1)^{1+3}}_{=1}\cdot\begin{vmatrix} \alpha-\gamma & \beta-\gamma \\ \alpha^2-\gamma^2 & \beta^2-\gamma^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha+\gamma & \beta+\gamma \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\cancel{\gamma}-\beta-\cancel{\gamma})$$

$$= (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)$$

(4) Υπολογίστε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

<u>Λύση</u>

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix} \underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=\!=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ (\alpha_2-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_3 \\ (\alpha_3-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

Δύο ίσες γραμμές.

(5) Ας είναι $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ τ.ω $A^2+2A=\mathbb{O}$

Νδο $A+I_3$ είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον $(A+I_3)^{-1}$. Έπειτα, υπολογίστε την ορίζουσα του A

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Λύση

Αρχικά, $A^2+2A=\mathbb{O} \overset{+I_3}{\Longleftrightarrow} A^2+2A+I_3=I_3 \Longleftrightarrow$

$(A+I_3)^2=I_3 \Longleftrightarrow (A+I_3)(A+I_3)=I_3$

Άρα, $A+I_3$ είναι αντιστρέψιμος με

$(A+I_3)^{-1} = A+I_3$

Τώρα, $A^2+2\cdot A=\mathbb{O} \Longleftrightarrow A\cdot(A+2I_3)=\mathbb{O}$

$\Rightarrow |A\cdot(A+2I_3)| = 0 \Longleftrightarrow$

$|A|\cdot|A+2I_3| = 0 \Longleftrightarrow |A|=0$ ή $|A+2I_3|=0$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $|A|\neq 0$

Άρα, υπάρχει ο αντίστροφος A^{-1} του A.

Πολ/ζουμε στη δοθείσα σχέση με A^{-1}

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

και παίρνουμε:

$$A^{-1}\left(A^2+2A\right)=A^{-1}\cdot \mathbb{O} \Rightarrow$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I_3}\left(A+2I_3\right)=\mathbb{O} \Rightarrow$$

$$A+2I_3=\mathbb{O} \Rightarrow A=-2I_3$$

Άρα, $|A|=(-2)^3\cdot|I_3|=-8\cdot 1=-8$

Συνεπώς,

$$|A|=\begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ μη αντιστρέψιμος} \\ -8, & \text{αν } A \text{ αντιστρέψιμος} \end{cases}$$

(6) Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}=0$$

<u>Λύση</u>

Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \underset{=\!=}{\overset{\Sigma_1\to\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}{}}$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

$$\begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ 4-x & 2-x & 1 \\ 4-x & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (4-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=\!=\!=}} (4-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \overset{\text{Ανω τριγωνικος}}{=}$$

$$= (4-x)(1-x)(1-x) = (4-x)\cdot(1-x)^2$$

(ζ) Να δείξετε ότι η ορίζουσα του πίνακα

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & i & j & k & \ell \\ m & n & p & q & r \end{bmatrix}$$ είναι μηδέν.

Λύση

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

α) Αν $g=0$, αναπτύσσοντας την $|C|$ κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής και έτσι:

$$|C| = \underbrace{(-1)^{1+4}}_{=-1} \cdot \alpha \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & i & j & \ell \\ m & n & p & r \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{1+5}}_{=1} \cdot b \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & i & j & \ell \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

Οι ορίζουσες τώρα στο προηγούμενο άθροισμα (αν εναλλάξουμε τις Σ_1, Σ_4 και Σ_2, Σ_3 μεταξύ τους), ανάγονται σε δύο ορίζουσες κάτω τριγωνικών πινάκων με το δεύτερο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου το 0. Άρα, και οι δύο είναι ίσες με μηδέν. Οπότε, $|C|=0$.

β) Αν $g \neq 0$, αφαιρούμε ένα κατάλληλο πολ/σιο της $4^{ης}$ γραμμής απ' την $5^{η}$ γραμμή μπορούμε να μηδενίσουμε το m.

Έτσι προκύπτει ο πίνακας:

$$C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ g & i & j & k & l \\ 0 & n & p & q & r \end{bmatrix}$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Εναλλάσουμε τώρα την Γ_5 και Γ_4 και

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

προκύπτει ο πίνακας

$$C'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e & f \\ 0 & n & p & q & r \\ g & i & j & k & l \end{bmatrix}$$ ο οποίος

έχει $|C''| = 0$, απ' την περίπτωση (α)

Τότε, $|C| = |C'| = -|C''| = 0$. Ο.Ε.Δ

(8) Υπολογίστε την $n \times n$ ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Λύση</u>

Θέτουμε την ζητούμενη ορίζουσα με D

Αφαιρούμε διαδοχικά την Γ_1 απ' τις Γ_i, για κάθε $2 \le i \le n$. Έτσι, συνάγουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Άνω Τριγωνικος}}{=\!=} 1 \cdot \underbrace{(-1)(-1)\cdots(-1)}_{(n-1)-\text{φορες}}$$

$$= (-1)^{n-1}.$$

ΔΗΜΟΓΛΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ (Msc)
Email: kdimoglou@onlymaths.gr

Τέλος Λύσεων.